第 10 講　総合問題(2)

1　長さ 1 の線分 AB を直径とする円を底面とし，高さが $\frac{\sqrt{3}}{2}$ の直円錐を考える．この直円錐の側面上で 2 点 A，B を結ぶ最短の道を l とする．直円錐の頂点を C，底面の中心を O とする．以下の問いに答えよ．

(1)　l の長さを求めよ．

(2)　l 上の点 P に対して，線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする．$\angle \mathrm{AOQ}=\theta$ として CP^2 を $\sin\theta$ で表せ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(3)　P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし，A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする．$0^\circ < \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で $\frac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ の最大値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標平面上で，不等式

$$2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$$

が表す領域を D とする．

(1)　領域 D を図示せよ．

(2)　領域 D 内の点 $(x,\ y)$ で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x|y|$ が有理数となる点をすべて求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　実数 p，自然数 q に対して，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ をそれぞれ

$$a_1=-1,\quad a_{n+1}=pa_n+p$$

$$b_1=q,\quad b_{n+1}=b_n+(-1)^{n-1}q$$

と定める．

(1)　$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ をはじめから順に区画に分け，第 m 区画に属する項の個数が b_m となるようにする．m を正の偶数とするとき第 m 区画に属する項の和 T_m を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　総合問題(2)

1 長さ 1 の線分 AB を直径とする円を底面とし，高さが $\frac{\sqrt{3}}{2}$ の直円錐を考える．この直円錐の側面上で 2 点 A，B を結ぶ最短の道を l とする．直円錐の頂点を C，底面の中心を O とする．以下の問いに答えよ．

(1) l の長さを求めよ．

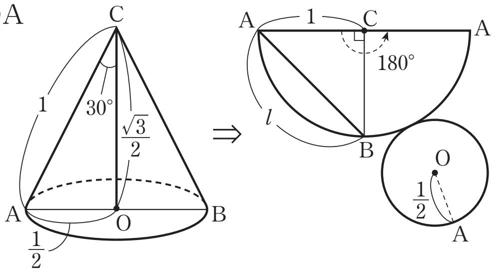
(2) l 上の点 P に対して，線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする．$\angle\mathrm{AOQ}=\theta$ として CP^2 を $\sin\theta$ で表せ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(3) P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし，A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする．$0^\circ < \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で $\frac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ の最大値を求めよ．

(1) 側面の中心角を x° とすると　$2\mathrm{AC}\cdot\frac{x}{360}=2\mathrm{OA}$

$$x=360\cdot\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AC}}=360\cdot\frac{1}{2}=180$$

よって，右図より $l=\boldsymbol{\sqrt{2}}$



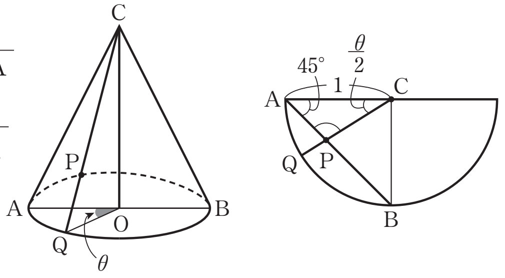
(2) $\angle\mathrm{AOQ}=\theta$ より　$\angle\mathrm{ACQ}=\theta\cdot\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AC}}=\frac{\theta}{2}$

よって　$\angle\mathrm{CPA}=180^\circ-\left(45^\circ+\frac{\theta}{2}\right)=135^\circ-\frac{\theta}{2}$

△ACP で正弦定理より　$\frac{\mathrm{CP}}{\sin 45^\circ}=\frac{1}{\sin\angle\mathrm{CPA}}$

$$\mathrm{CP}^2=\frac{1}{2\sin^2\angle\mathrm{CPA}}=\frac{1}{2\cdot\frac{1-\cos 2\angle\mathrm{CPA}}{2}}$$

$$=\frac{1}{1-\cos(270^\circ-\theta)}=\boldsymbol{\frac{1}{1+\sin\theta}}$$

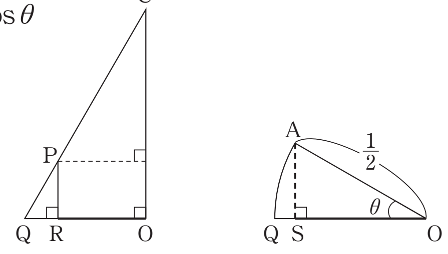


(3) $\mathrm{OR}=\mathrm{CP}\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\mathrm{CP}$　　$\mathrm{OS}=\mathrm{AO}\cos\theta=\frac{1}{2}\cos\theta$

$$\frac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}=\frac{\cos^2\theta}{\mathrm{CP}^2}=\cos^2\theta(1+\sin\theta)$$

$$=(1-\sin^2\theta)(1+\sin\theta)$$

$$=(1+\sin\theta)^2(1-\sin\theta)$$



$\sin\theta=t$ とおくと　$0<t\leqq 1$

$$f(t)=-(t+1)^2(t-1)=-(t+1)^2\{(t+1)-2\}=-(t+1)^3+2(t+1)^2$$

$$f'(t)=-3(t+1)^2+4(t+1)=-(t+1)(3t-1)$$

よって，最大値は　$f\left(\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{32}{27}}$

t	(0)	…	$\frac{1}{3}$	…	1
$f'(t)$		＋	0	−	
$f(t)$		↗		↘	

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標平面上で，不等式

$$2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$$

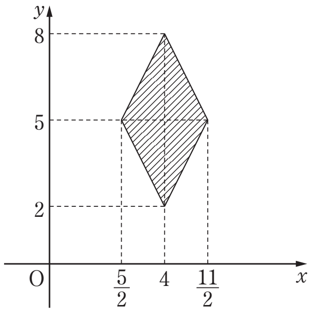
が表す領域を D とする．

(1)　領域 D を図示せよ．

(2)　領域 D 内の点 $(x,\ y)$ で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x|y|$ が有理数となる点をすべて求めよ．

(1)　$2|x-4|+|y-5|\leqq 3$

これは　$2|x|+|y|\leqq 3$ のグラフを，x 軸方向に 4，y 軸方向に 5　平行移動したものである．（右図）



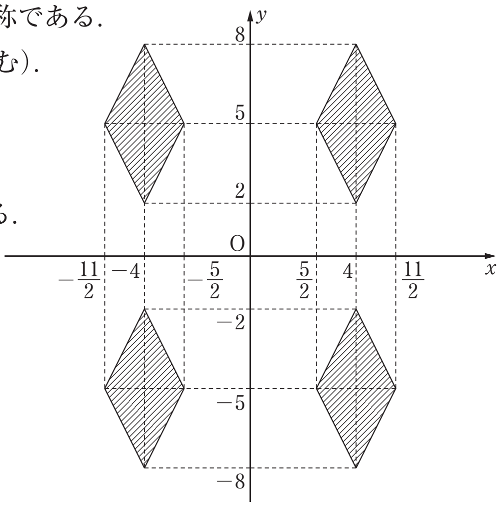
$2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$　について

点 $(a,\ b)$ がこの式を満たせば

$(a,\ -b)$，$(-a,\ b)$，$(-a,\ -b)$ もこの式を満たす．

よって，グラフは x 軸，y 軸，原点に関して対称である．

ゆえに，求める領域は右下図斜線部分（境界含む）．



(2)　$\log_x|y|$ が有理数のとき

$$\log_x|y|=\frac{n}{m}\quad（m,\ n \text{ は自然数}）$$　とおける．

このとき　$|y|^m=x^n$　これを満たす(1)の領域内の点 $(x,\ y)$ を考える．

第 1 象限内の点を考えると

$x=3$ のとき　条件を満たす y は存在しない

$x=4$ のとき　$y=2,\ 4,\ 8$

$x=5$ のとき　$y=5$

よって，図形の対称性より，求める点は　**$(4,\ \pm 2)$，$(4,\ \pm 4)$，$(4,\ \pm 8)$，$(5,\ \pm 5)$**

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　実数 p，自然数 q に対して，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ をそれぞれ

$a_1=-1$，$a_{n+1}=pa_n+p$

$b_1=q$，$b_{n+1}=b_n+(-1)^{n-1}q$

と定める．

(1)　$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ をはじめから順に区画に分け，第 m 区画に属する項の個数が b_m となるようにする．m を正の偶数とするとき第 m 区画に属する項の和 T_m を求めよ．

(1)　**$p=1$ のとき**　$a_{n+1}=a_n+1$，$a_1=-1$　　よって　$a_n=-1+(n-1)\cdot 1=n-2$

ゆえに　$S_n=\dfrac{n\{-1+(n-2)\}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{n(n-3)}{2}}$

$p\neq 1$ のとき　$a_{n+1}=pa_n+p$ より

$$a_{n+1}+\frac{p}{p-1}=p\left(a_n+\frac{p}{p-1}\right),\ a_1+\frac{p}{p-1}=-1+\frac{p}{p-1}=\frac{1}{p-1}$$

$$a_n+\frac{p}{p-1}=\frac{1}{p-1}\cdot p^{n-1}\qquad よって\quad a_n=\frac{1}{p-1}(-p+p^{n-1})$$

ゆえに　$S_n=\dfrac{1}{p-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-p+p^{k-1})=\dfrac{1}{p-1}\left(-pn+\dfrac{p^n-1}{p-1}\right)=\boldsymbol{\dfrac{(1-p)pn+p^n-1}{(p-1)^2}}$

(2)　数列 $\{b_n\}$ は q，$2q$，q，$2q$，…… であり，q と $2q$ を繰り返す．

m が正の偶数のとき

第 m 区画の末項は，数列 $\{a_n\}$ の第 $(q+2q)\cdot\dfrac{m}{2}=\dfrac{3}{2}mq$ 項であり

第 $m-1$ 区画の末項は，数列 $\{a_n\}$ の第 $(q+2q)\cdot\dfrac{m-2}{2}+q=\dfrac{3}{2}mq-2q$ 項

$\dfrac{3}{2}mq=N$　とおくと　$\dfrac{3}{2}mq-2q=N-2q$

よって　$p=1$ のとき

$$T_m=S_N-S_{N-2q}=\frac{1}{2}\{N(N-3)-(N-2q)(N-2q-3)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{N^2-3N-N^2+(4q+3)N-2q(2q+3)\}$$

$$=q(2N-2q-3)=q(3mq-2q-3)$$

$p\neq 1$ のとき

$$T_m=\frac{1}{(p-1)^2}\{(1-p)p\{N-(N-2q)\}+p^N-p^{N-2q}\}$$

$$=\frac{1}{(p-1)^2}\left\{2pq(1-p)+p^{\frac{3}{2}mq}(1-p^{-2q})\right\}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 座標平面上の4点$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(0,\ 1)$からなる集合をL，不等式$ax+by-c \geqq 0$を満たす実数x，yを座標としてもつ点$(x,\ y)$からなる集合をDとする．このとき，LとDの共通部分$L \cap D$について次の問いに答えよ．

(1) 実数a，b，cをどのように選んでも，$L \cap D = \{(0,\ 0),\ (1,\ 1)\}$にならないことを示せ．

(2) $L \cap D = \{(1,\ 1)\}$ならば，$\dfrac{c}{\sqrt{2}} \leqq \sqrt{a^2+b^2} < \sqrt{2}\,c$であることを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　数列 $\{a_n\}$ は次のように定められている．初項 $a_1=0$ であり，すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1}=-a_n+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$$

が成り立つ．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　a_3，a_4 を求めよ．

(2)　α を定数として $b_n=(-1)^n(a_n+\alpha)$ とおく．$\{b_n\}$ が等差数列になるためには α をどのように定めればよいか．α の値を求めよ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表せ．

(4)　数列 $\{a_n\}$ の第 $2n$ 項までの 2 乗の和　$S_{2n}=a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_{2n}{}^2$　を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　座標平面上の4点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(0,\ 1)$ からなる集合を L，不等式 $ax+by-c\geqq 0$ を満たす実数 x，y を座標としてもつ点 $(x,\ y)$ からなる集合を D とする．このとき，L と D の共通部分 $L\cap D$ について次の問いに答えよ．

(1)　実数 a，b，c をどのように選んでも，$L\cap D=\{(0,\ 0),\ (1,\ 1)\}$ にならないことを示せ．

(2)　$L\cap D=\{(1,\ 1)\}$ ならば，$\dfrac{c}{\sqrt{2}}\leqq\sqrt{a^2+b^2}<\sqrt{2}\,c$ であることを示せ．

(1)　$L\cap D=\{(0,\ 0),\ (1,\ 1)\}$ であるとすると，集合 D に $(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$ が含まれ，$(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ が含まれない．つまり，$(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$ は $ax+by-c\geqq 0$ を満たし，$(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ は $ax+by-c<0$ を満たす．したがって

$-c\geqq 0$ ……①　　$a+b-c\geqq 0$ ……②　　$a-c<0$ ……③　　$b-c<0$ ……④

①より　$c\leqq 0$ ……①′　　②より　$a+b\geqq c$ ……②′

③より　$a<c$ ……③′　　④より　$b<c$ ……④′

③′＋④′と①′より　$a+b<2c\leqq c$　　これと②′を同時に満たす a，b，c は存在しない．

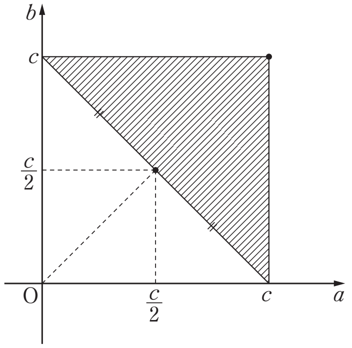
ゆえに　$L\cap D=\{(0,\ 0),\ (1,\ 1)\}$ になることはない．

(2)　$L\cap D=\{(1,\ 1)\}$ より，集合 D に $(1,\ 1)$ が含まれ，$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$,$(0,\ 1)$ が含まれない．

よって　$a+b\geqq c$，$-c<0$，$a-c<0$，$b-c<0$

すなわち　$a+b\geqq c$，$a<c$，$b<c$，$c>0$ を満たす．

ここで，c を $c>0$ のある値で固定して考えると　a，b の満たす条件は下図斜線部の領域で表される（境界は $a=c$，$b=c$ を含まない）．



$\sqrt{a^2+b^2}=k$ とおくと，$a^2+b^2=k^2$

よって，原点中心の円が右図領域と共有点をもつときの半径 k の最大，最小を考える．

最小となるのは　$(a,\ b)=\left(\dfrac{c}{2},\ \dfrac{c}{2}\right)$　のときで，

このとき　$k=\sqrt{\left(\dfrac{c}{2}\right)^2+\left(\dfrac{c}{2}\right)^2}=\dfrac{c}{\sqrt{2}}$

また，k は　$(a,\ b)=(c,\ c)$　のときの値 $\sqrt{c^2+c^2}=\sqrt{2}\,c$ よりも小さい．

ゆえに　$\dfrac{c}{\sqrt{2}}\leqq\sqrt{a^2+b^2}<\sqrt{2}\,c$

2　数列 $\{a_n\}$ は次のように定められている．初項 $a_1=0$ であり，すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1}=-a_n+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$$ が成り立つ．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　a_3，a_4 を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2) α を定数として $b_n=(-1)^n(a_n+\alpha)$ とおく．$\{b_n\}$ が等差数列になるためには α をどのように定めればよいか．α の値を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表せ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の第 $2n$ 項までの2乗の和　$S_{2n}=a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_{2n}{}^2$　を求めよ．

(1) $a_1=0$ と $a_{n+1}=-a_n+\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$ により，$a_2=-a_1+\dfrac{1+(-1)^2}{2}=0+1=1$

$a_3=-a_2+\dfrac{1+(-1)^3}{2}=-1+0=\mathbf{-1}$　　$a_4=-a_3+\dfrac{1+(-1)^4}{2}=1+1=\mathbf{2}$

(2) $\boxed{b_{n+1}-b_n}$ ◀── **この計算結果がどうなれば「等差数列」に導けるか…**

$=(-1)^{n+1}(a_{n+1}+\alpha)-(-1)^n(a_n+\alpha)=(-1)^{n+1}(a_{n+1}+\alpha)+(-1)^{n+1}(a_n+\alpha)$

$=(-1)^{n+1}(a_{n+1}+a_n+2\alpha)$

$=(-1)^{n+1}\left\{\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}+2\alpha\right\}=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}+2\alpha\right)(-1)^{n+1}$

$\{b_n\}$ が等差数列になるためには，この値が n に関わらず一定になればよい．

よって　$\dfrac{1}{2}+2\alpha=0$　　$\boldsymbol{\alpha=-\dfrac{1}{4}}$

(3) (2)より　$\alpha=-\dfrac{1}{4}$ のとき　$b_n=(-1)^n\left(a_n-\dfrac{1}{4}\right)$　……①　を満たす数列 $\{b_n\}$ は公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列．

また，$b_1=-\left(a_1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$　　よって　$b_n=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{2n-1}{4}$

したがって，①より　$(-1)^n\left(a_n-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{2n-1}{4}$

両辺に $(-1)^n$ をかけることにより

$a_n-\dfrac{1}{4}=(-1)^n\cdot\dfrac{2n-1}{4}$

よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{4}\{1+(-1)^n\cdot(2n-1)\}}$

> (2)は明らかに(3)のための「誘導」．なぜ突然「等差数列」が出てきたのか疑問を持つかもしれない．しかしながら，与えられた漸化式を見て，(2)のような変形を行うことで等差数列になることに「気づけば」苦労しないわけで，多くの人が気づかないであろう．だからこそ(2)の誘導がある．それに乗れたかどうかが鍵．

(4) (3)の結果より，k を自然数として

$a_{2k-1}=\dfrac{1}{4}\{-(4k-3)+1\}=-k+1$　　$a_{2k}=\dfrac{1}{4}\{(4k-1)+1\}=k$

よって　$S_{2n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}{}^2+a_{2k}{}^2)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{(-k+1)^2+k^2\}$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2k+1)$

$=2\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n(n+1)+n=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}n(2n^2+1)}$

> 「第 $2n$ 項までの和」の多くがこの「偶数項」と「奇数項」をそれぞれ n 項ずつ加えるという解法に至る．(1)で帰納的に項を導くことによりそれに気づくことは難しいかもしれないが，入試の世界においては典型的解法である．ここは誘導なしで導きたい．Σ の計算が1つですむこともポイント．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。